Préparation au concours général, séance du 21 février 2024

Exercice 1 : un peu d'intégration

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x \, dx$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1)$$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$$
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n\,!}$
   a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n)
7. Justifier enfin que :
$$e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!}\right)$$

Exercice 2 : des séries très classiques…

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de deux séries (c'est-à-dire des suites définies par des sommes).

On note pour $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, dite somme partielle de la série harmonique alternée.

Partie 1: Utilisation d'une intégrale

1. Calculer pour tout entier naturel p non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p \, dt$.
2. En utilisant la question précédente, démontrer que $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.
3. En déduire que $|S_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Conclure quand à la nature de la série harmonique alternée et précisez sa limite.

Partie 2: Utilisation de la série harmonique

1. On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   Montrer que pour tout entier naturel n non nul, nous avons l'encadrement:

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la série $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $T_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Etudier le sens de variation de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.

Remarque : cette limite notée γ est appelée **constante gamma d'Euler**.

Exercice 3 : un exemple de suite implicite

Une suite implicite est une suite (u_n) de réels dont on a prouvé l'existence, mais dont on ne connait pas la valeur. On dit qu'ils sont définis implicitement. Ces réels sont souvent tous les solutions d'une équation du type $f(x) = constante$, que l'on ne sait pas résoudre, mais dont on prouve l'existence d'une solution par le théorème de la bijection.

Méthode d'étude des suites implicites :

- *Pour prouver l'existence des termes d'une suite implicite, il faut souvent utiliser le théorème de la bijection.*
- *Pour étudier la suite, il faut utiliser l'équation qu'elle vérifie. En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on connait en revanche la suite de leurs images par la fonction f. Ainsi, on peut comparer les images pour trouver des propriétés sur la suite.*

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.